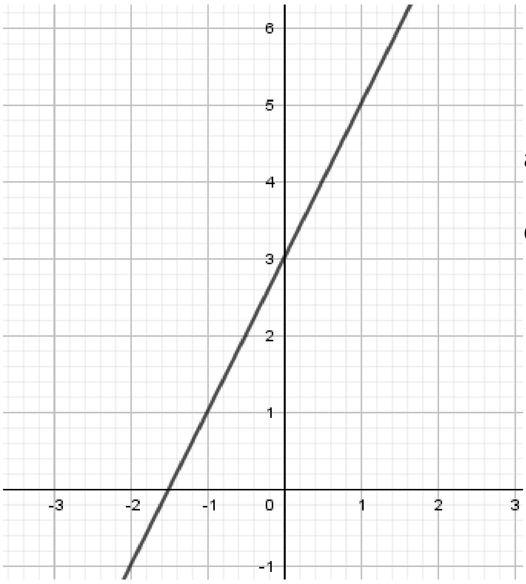
Anwendungen der Differentialrechnung
II – Rekonstruktion von Funktionen – 16.03.-20.03.2020

II.1 - Einleitung: Bis zu diesem Zeitpunkt haben wir zumeist Funktionen untersucht, die uns durch eine Vorschrift - die Funktionsgleichung - vorgegeben waren. Im Folgenden soll es uns darum gehen, Funktionsgleichungen durch gegebene Informationen zu ermitteln und diese aufzustellen.

Dabei ist dieses Thema eigentlich gar nicht so neu, jeder von euch hat bereits Funktionen rekonstruiert. Das zeigen die folgenden Beispiele:

Beispiel 1: Gegeben ist der Graph einer linearen Funktion. Ermittle die zugehörige Funktionsgleichung!



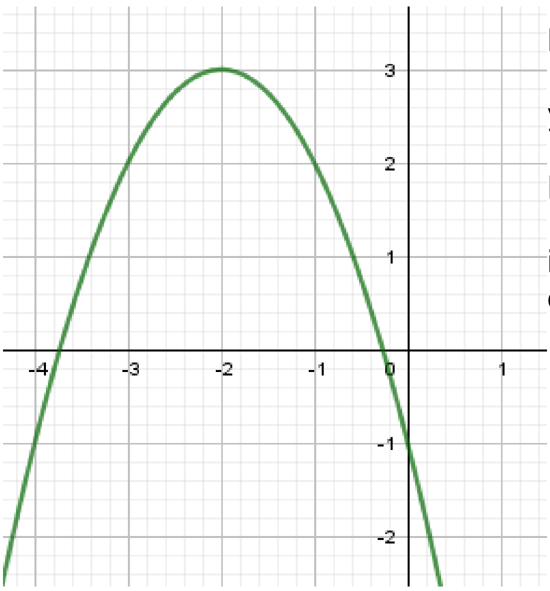
Lösung: Die Funktionsgleichung einer linearen Funktion hat die Form $y = mx + n$,

Dabei ist „n“ die Schnittstelle mit der y-Achse, hier also $n = 3$

Weiter ist „m“ der Anstieg der Funktion, dieser entspricht hier $m = 2$.

Also lauter die Funktionsgleichung $y = 2x + 3$.

Beispiel 2: Der Scheitelpunkt einer nach unten geöffnete Normalparabel liegt bei (-2|1). Wie lautet ihre Funktionsgleichung?



Lösung: Die Funktionsgleichung einer Parabel (einer quadratischen Funktion) lautet $y = a(x – b) + c$

Da hier eine nach unten geöffnete Normalparabel vorliegt, ist $a = -1$.

Die allgemeinen Koordinaten des Scheitelpunktes in der obigen Funktionsgleichung lauten (-b|c), daher sind $b = 2$ und $c = 3$.

Also lauter die Funktionsgleichung $y = -(x+2)^2 + 3$.

Im Folgenden werden wir eine Vorgehensweise erarbeiten, wie auch komplexere Funktionen rekonstruiert werden können. Zu Beginn werde ich dazu ein Beispiel präsentieren. Im Anschluss ist es an euch, in *AB 4* die Vorgehensweise an einem eigenen Beispiel nachzuvollziehen.

Beispiel 3: Gesucht ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit dem Wendepunkt W(-2|6), die an der Stelle x = -4 ein Maximum hat. Die Steigung der Wendetangente ist gleich -12.

Lösung: Wir analysieren nacheinander die gegebenen Informationen…

Erklärung: der Grad einer Funktion entspricht der größten Potenz von x – hier also gleich 3

Ganzrationale Funktionen bzw. Polynomfunktionen werden immer wiefolgt beschrieben: Grad 1: $f(x) = ax + b$
Grad 2: $f(x) = ax^2 + bx + c$
Grad 3: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Grad 4: $f(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$
usw.
Die Parameter vor den Potenzen von x nennt man Koeffizienten.

(1) Ansatz für die Funktionsgleichung

$f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

(2) Eigenschaften der Funktion f

1. Wendepunkt *W(-2|6)*
2. Maximum bei x = -4
3. *Steigung der Wendetangente ist gleich -12*

(3) Umsetzen der Eigenschaften in Gleichungen

1. $f''(-2) = 0$	(Ansatz: Wendestelle)
$f(-2) = 6$	(Ansatz: y-Wert des Wendepunktes)
2. $f'(-4) = 0$	(Ansatz: Maximum an gegebener Stelle)
3. $f'(-2) = -12$	(Ansatz: Anstieg an der Wendestelle)

(4) Lösen des linearen Gleichungssystems

mit der Hand oder mit CAS – wir beschreiben hier das Vorgehen mit dem CAS.

Definiere die Funktionen
f(x) := a x³ + b x² + c x + d
a1(x) := 3ax² + 2bx + c
a2(x) := 6ax + 2b

Menü > Algebra > Gleichungssystem lösen > Gleichungssystem lösen - Anzahl der Gleichungen: 4
Variablen: a, b, c, d
Gleichungen: a2(-2) = 0 a1(-4) = 0
f(-2) = 6 a1(-2) = -12
Ergebnisse: a = -1, b = -6, c = 0, d = 22

(5) Angabe des Resultats

$f(x) = -x^3 - 6x^2 + 22$

<u>AB 4 - Lösung von Rekonstruktionsaufgaben - Vorgehen und ein Beispiel</u>

Problem:

Gesucht ist eine Polynomfunktion zweiten Grades, welche die y-Achse bei y = -2,5 schneidet und einen Hochpunkt bei H(3|2) besitzt.

Lösungsverfahren:

Schritt	**Beispielrechnung**
<u>1) Ansatz</u> Welchen Grad hat die gesuchte Funktion? Ggf. Bilden der Ableitungen.	
<u>2) Gegebene Eigenschaften</u> Alle gegebenen Eigenschaften aufgreifen und darlegen.	
<u>3) Umsetzen in Gleichungen</u> Eigenschaften nun in Gleichungen formulieren.	
<u>4) Gleichungssystem lösen</u> Lösen des linearen Gleichungssystems ergibt Werte für die gesuchten Koeffizienten.	
<u>5) Angabe des Ergebnisses</u> Angabe der Funktion f(x) mit den eingesetzten Koeffizienten, Überprüfen auf Plausibilität.	

Lösungen AB 4:

Schritt	Beispielrechnung
1) Ansatz Welchen Grad hat die gesuchte Funktion? Ggf. Bilden der Ableitungen.	(1) $f(x) = ax^2 + bx + c$ $f'(x) = 2ax + b$
2) Gegebene Eigenschaften Alle gegebenen Eigenschaften aufgreifen und darlegen.	(2) 1. Die Funktion schneidet die y-Achse bei -2,5 2. Hochpunkt bei (3|2)
3) Umsetzen in Gleichungen Eigenschaften nun in Gleichungen formulieren.	(3) 1. $f(0) = -2{,}5$ 2. $f'(3) = 0$ 3. $f(3) = 2$
4) Gleichungssystem lösen Lösen des linearen Gleichungssystems ergibt Werte für die gesuchten Koeffizienten.	(4) CAS: $a= -0{,}5$ $b= 3$ $c= -2{,}5$
5) Angabe des Ergebnisses Angabe der Funktion f(x) mit den eingesetzten Koeffizienten, Überprüfen auf Plausibilität.	(5) $f(x) = -0{,}5x^2 + 3x -2{,}5$

Hier eine kurze Zusammenfassung in Form eines Filmbeitrages auf einer bekannten Videoplattform :

https://www.youtube.com/watch?v=b25InOh-AUk

Es folgen Übungen zur Rekonstruktion von Funktionen – in der Bearbeitung mit und ohne CAS.

OHNE CAS

OHNE CAS

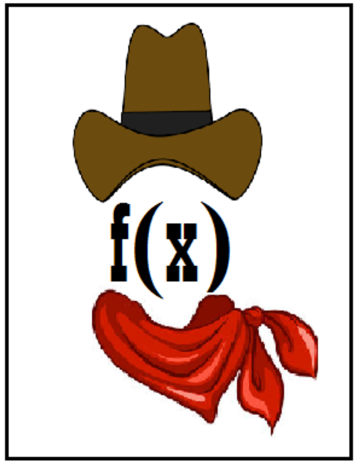
WANTED

REWARD: $1,000

Von der Verdächtigen ist nur bekannt, dass es sich um eine ganzrationale Funktion vom Grad 2 handelt, deren Graph das letzte Mal an den Punkten A(0|0) und B(2|3) gesichtet wurde. Außerdem hat sie eine Extremstelle bei $x=\frac{1}{2}$

OHNE CAS

WANTED

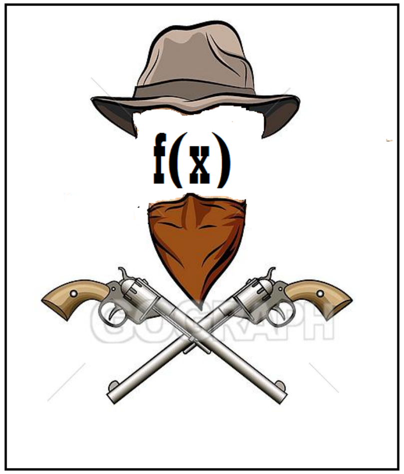


REWARD: $5,000

Bei der Verdächtigen handelt es sich um eine quadratische Funktion, die zum letzten Mal am Punkt (2|4) gesichtet wurde. Augenzeugenberichten zufolge befindet sich ihr Scheitelpunkt im Punkt (3|2).

OHNE CAS

WANTED



REWARD: $10,000

Bei der Verdächtigen handelt es sich um jene berüchtigte quadratische Funktion, deren Graph an der Stelle $x=\frac{3}{4}$ einen Extremwert besitzt. Ihre Tangente verläuft im Kurvenpunkt (1|4) parallel zu ihrer Kumpanin g: $y=4x$.

Lösung

$f(x)=ax^2+bx+c \qquad f(0)=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=0$

$f(2)=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c=3 \qquad f'(x)=2ax+b$

$x=\frac{1}{2}$ *ist Extremstelle* $: f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=2a\cdot\frac{1}{2}+b=0$

$LGS: \qquad I.\, c=0 \qquad II.\, 4a+2b+c=3$

$III: a+b=0 \rightarrow a=-b$

$I.$ *und* $II\,I.\in II: \qquad II'.\, 4(-b)+2b+0=3$

$-2b=3 \rightarrow b=\frac{-3}{2} \qquad II'.\in III.: a=\frac{3}{2}$

$\underline{\rightarrow f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x}$

Lösung

$f(x)=ax^2+bx+c \qquad f(2)=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c=4$

$f(3)=a\cdot 3^2+b\cdot 3+c=2$

Scheitelpunkt $(3|2)$ *einer quadratischen Funktion*

ist Extrempunkt $\rightarrow f'(3)=0 \qquad f'(x)=2ax+b$

$f'(3)=2a\cdot 3+b=0$

$LGS: \qquad I.\, 4a+2b+c=4$

$II.\, 9a+3b+c=2 \qquad III.\, 6a+b=0 \rightarrow b=-6a$

$III.\in I.$ *und* $II.:$

$I'.\, 4a+2\cdot(-6a)+c=4 \rightarrow I'.\, -8a+c=4$

$II'.\, 9a+3\cdot(-6a)+c=2 \rightarrow II'.\, -9a+c=2$

$I'.-II'.: \qquad -8a+c-(-9a+c)=4-2$

$\rightarrow a=2$

$a=2\in I'.: I''.\,(-8)\cdot 2+c=4 \rightarrow c=20$

$a=2\in III: II''.\, b=-6\cdot 2=-12$

$\underline{\rightarrow f(x)=2x^2-12x+20}$

Lösung

$f(x)=ax^2+bx+c \qquad f(1)=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=4$

$f'(x)=2ax+b$

$f'\left(\frac{3}{4}\right)=2a\cdot\frac{3}{4}+b=0 \left(x=\frac{3}{4}\right.$ *ist Extremstelle*$\left.\right)$

$f'(1)=2a\cdot 1+b=4\,(f \hat{=}$ *bei* $x=1$ *Anstieg* $4)$

$LGS: \qquad I.\, a+b+c=4 \qquad II.\, \frac{3}{2}a+b=0$

$III.\, 2a+b=4$

$II.-III. \qquad \frac{3}{2}a+b-(2a+b)=0-4$

$\rightarrow -\frac{1}{2}a=-4 \rightarrow a=8$

$a=8\in III.: II'.: 2\cdot 8+b=4 \rightarrow b=-12$

$a=8$ *und* $b=-12\in I:$

$I'.: 8+(-12)+c=4 \rightarrow c=8$

$\underline{f(x)=8x^2-12x+8}$

Weitere Aufgaben zur Funktionsrekonstruktion mit CAS: LB. S. 169 / 3, 5, 6, 8

Hierzu findet ihr auf dieser Seite unten Lösungsansätze bzw. die Lösungen.

Lösungsansätze:

3) → symmetrisch zum Ursprung bedeutet punktsysmmetrisch, daher sind in der Funktionsgleichung nur die ungeraden Potenzen von x zu betrachten. Ansatz $f(x) = ax^3+bx$

5) → symmetrisch zur y-Achse bedeutet achsensymmetrisch, daher sind in der Funktionsgleichung nur die geraden Potenzen von x zu betrachten.
Ansatz f(x) = ax4+bx^2+c
→ Berührpunkt: Ansatz f(2) = 0, f'(2) = 0

6) → Der Ursprung ist der Punkt (0|0)

8) → für einen Sattelpunkt gilt: $f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)=0$

Lösungen:

3) $f(x) = x^3 - 3x$

5) $f(x) = 0{,}125x^4 - x^2 + 2$

6) $f(x) = -x^3 + 3x^2$

8) links: $f(x) = \frac{2}{9}x^2-\frac{4}{3}x+2$ rechts: $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 4$